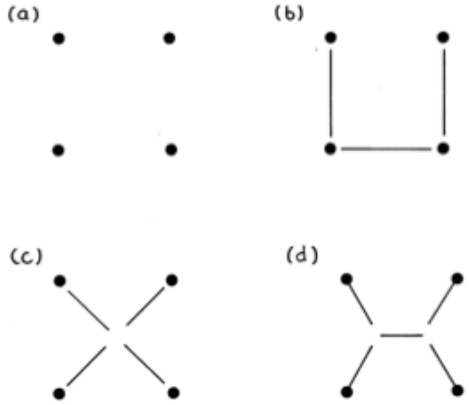

図 15.3　図 15-3: 長方形の点を結ぶ: (b) でもよい、(c) はよくない、(d) は最もよい。

この段階ではまだシュタイナー点を使ってはいけません。

（この場合の最短となるのは、図 15-2(b) で示される正方形の三辺を結ぶもので、長さは 3 メートルとなります。）

4. ここで、子供たちにシュタイナー点を一つ使って、全体の長さがより短くできるかどうかを試させます。

（この場合は、シュタイナー点を図 15-2(c) の様に四角形の中心に持ってくるのが最短となり、$2\sqrt{2}$ ＝約 2.83 メートルとなります。）

次に、シュタイナー点を 2 個使うことで、さらに短くすることができるかもしれないということを提案します。

（実際、図 15.2(d) のように 120 度の角度で線を引くことで、2 個の点を置くことができます。この場合の長さの合計は $1+\sqrt{3}=2.73$ メートルとなります。）

5. 子どもたちはシュタイナー点を 3 個にして、さらに改良できるでしょうか？

（この場合、シュタイナー点は 2 個の場合が最短となり、3 個以上使っても改善されません。）

6. 子どもたちと、どうしてこれらの問題が難しいかを議論します。

（理由は、まず、シュタイナー点をどこに置けばよいかがわからないということ。更に、置くことのできる可能性が無数にあることです。）

発展と応用

1. 速く活動を終えたグループは、図 15.3 のような 1 メートル× 2 メートルの長方形を用いた活動をしてみましょう。

子供たちは、シュタイナー点を 1 つ加えた場合は長さの合計が長くなるが、シュタイナー点を 2 つ加えた場合は、長さの合計が短くなることに気が付くでしょう。

（図 15.3(b) の長さは 4 メートル、図 15.3(c) だと $2\sqrt{5}=4.47$ メートル、図 15.3(d) だと $2+\sqrt{3}=3.73$ メートルとなります。）

正方形と比べて、長方形では 1 個のシュタイナー点を加えると長さが長くなることの理由を説明できるか確認しましょう。

（理由は、図 15-2 の正方形が図 15-3 の長方形に引き伸ばされるとき、図 15-3(b) と図 15-3(d) では 1 方向だけが引き伸ばされますが、図 15-3(c) では両方の対角線方向に引き伸ばされてしまうからです。）

2. 高学年はより大きな問題に取り組むことができます。

161 ページと 162 ページにワークシートとして、氷上の道でつなぎたい地点の配置図が 2 種類用意されています。

子供達は、ワークシートのコピーを何枚か使うか、ワークシートの上に透明シートをのせて、消すことができ

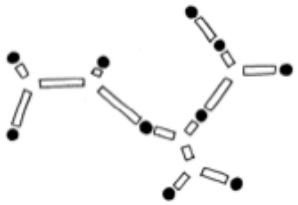

図 15.4　図 15.4：161 ページの例の最小シュタイナー木

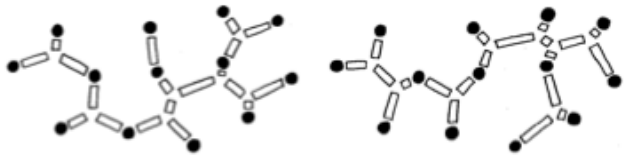

図 15.5　図 15.5：162 ページの例にたいする 2 つの最小シュタイナー木

図 15.6　図 15.6 6 段のはしご

るペンを使うことによっていろいろな解を試すことができます。

（図 15.4 は 161 ページの例の最小の解です。そして図 15.5 は 162 ページの例の解であり、2 つの解の長さの合計はほとんど同じです。）

図 15.5 はこの種の問題がとても難しい理由を示しています。シュタイナー点を置く位置には、数多くの選択肢があるのです！

3. 図 15.6 の様なはしご状のネットワークは、この問題を発展させる他の方法のひとつです。

最小シュタイナー木のいくつかは図 15.7 に示されています。

2 段のはしごはまさに正方形と同じものとなります。

しかし、3 段のはしごの解はかなり違うものになることに、思い出しながらもう一度描いてみようとすれば、すぐに気づくでしょう！

また、4 段のはしごの解は 2 段のはしごの解を連結したものに近くなりますが、5 段のはしごの場合は 3 段のはしごの解を拡張したものに近いものになります。

一般的に、はしご状に対する最小シュタイナー木の形は、はしごの段数が偶数か奇数かに依存します。

偶数のときは、2 段のはしごが連結したような形になります。

奇数のときは、3 段のはしごの解を繰り返したような形になります。

しかし、これらのことを厳密に証明することは容易ではありません。

4. 石鹸皮膜（シャボン玉の膜）でシュタイナー木の形をつくるのも興味深い活動です。

図 15.8 のように、2 枚の固くて透明なプラスティックの間に、上から見たらシュタイナー木で結ぶ点となる位置にピンを立てます。

次に、全体を石けん液に浸します。

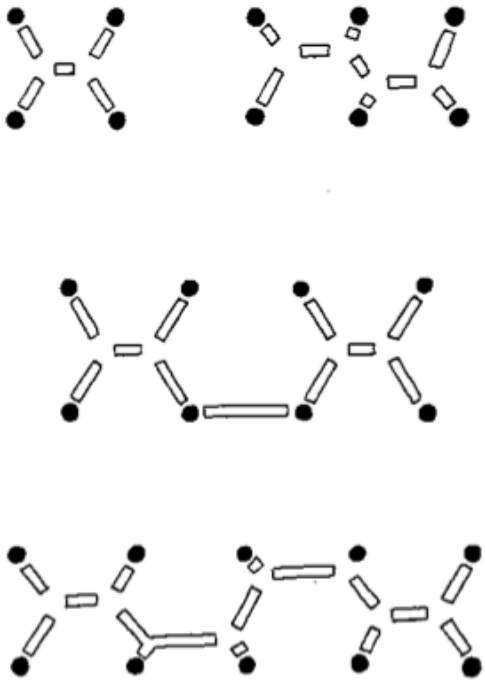

図 15.7　図 15.7 2 段、3 段、4 段、5 段のはしごに対する最小シュタイナー木

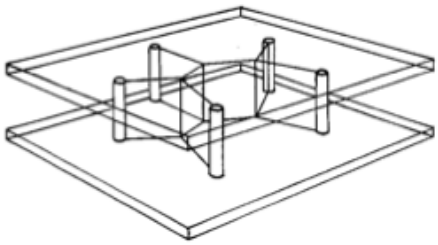

図 15.8　図 15.8 シャボン玉でシュタイナー木を作る

取り出すと、2 枚の板の間にシャボン玉膜が張られていて上から見ると美しいシュタイナー木のネットワークになってピンを結んでいるのを見ることができます。

しかし残念なことに、必ず最小シュタイナー木になるわけではありません。

シャボン玉膜は上から見た全体の長さを最小にする形になりますが、それは表面張力によりシャボン玉膜の表面積を最小にするといった局所的な最小であり、全体の最小となるわけではありません。

まったく違った形で、合計の長さをさらに小さくできるシュタイナー点の置き方があるかもしれません。

たとえば、ある時は取り出したシャボン玉膜が図 15.5 の左の形の様になり、またある時は取り出したら右の形の様になっていたということも考えられます。

実際のコンピュータでは

私たちが作業してきたネットワークは最小シュタイナー木です。

なぜ「木」と呼ばれるのかというと、円の部分がなく、実際の木の枝と同じように分岐するからで、普通は再び合流して再成長することがないからです。

それが「シュタイナー」木と呼ばれるのは、シュタイナー点と呼ばれる新しい点を、その木が接続する元の点に加えることができるからです。

そしてそれが「最小」と呼ばれるのは、それらの点を結び付ける木のうちで、最も長さが短いからです。

14 章のマッディ市の例では、いくつかの地点を接続する長さの合計を最小にするネットワークを最小全域木と呼ぶことを学びました。

シュタイナー木は、新たな点を加えることができるということを除けば全域木と同じものとなります。

14 章の最小全域木を見つけるためには、まだ接続されていない最も近い 2 つの点を結び付けていくという、とても効率でよいアルゴリズムが存在したが。しかし、最小シュタイナー問題には効率のよい汎用的な解法が存在しないことは興味深いことです。

シュタイナー木は、点を置くべき場所を決定しなければならないのではるかに難しくなります。

実際は、かなり意外なことに、シュタイナー木の難しい部分はシュタイナー点の正確な場所を決定することにではなく、図 15.5 の 2 つの解法の違いのように、大まかにどこにシュタイナー点を置くべきかを決めることにあるのです。

一度新たにシュタイナー点を置く領域を決めれば、後の最適な位置に微調整することは比較的単純です。

シャボン玉膜はとても効率よく位置を微調整します。また、コンピュータも同様です。

意外なことですが、最小シュタイナー木を見つけることは、電話産業で大金を節約することにつながっています。

アメリカで企業が大規模な私有の電話回線を運用するときは、電話会社から回線を借りことになります。

この時の料金は、どの経路の回線を実際に利用したのかではなく、最短ネットワーク長に基づいて計算されるのです。

その理由は電話会社が遠回りとなる回線を使ったからといって、顧客はそのための余分な料金を払う必要はないからです。

最初は、請求額を計算するアルゴリズムは、最小全域木を決定することで行われていました。

ところが、電話会社の顧客であった、三つのハブ空港を持ったある航空会社が、中間地点となるもう一つのハブ空港を追加すれば、ネットワーク長の合計を短くできることに気づいたのです。

電話会社は、シュタイナー点に回線の交換局があったとした場合の料金に値下げをさせられてしまいました。

典型的な形では、最小シュタイナー木は最小全域木より 5% から 10% 短いだけですが、支払うお金の総額が大きいと、意味のある節約ができるようになるのです。

シュタイナー木問題は、複数の地点同士を結ぶ最短のネットワークの発つけることができるため、「最短ネットワーク問題」と呼ばれることがあります。

ところで、13 章と 14 章の活動にすでに取り組んだのであれば、最小シュタイナー木問題が NP 完全であると聞いても驚くことはないかと思われます。

地点の数が増えるにつれて、シュタイナー点を置くことのできる位置の数も同様に増加するため、全ての可能性を試みるためには指数関数的に増加する探索が必要となります。

これは、指数的な探索が最良の解法であるのか、または、まだ発見されていない多項式時間アルゴリズムが存在するのかといった何千もの問題のひとつです。

しかし、この問題のための多項式時間アルゴリズムが見つかれば、グラフ彩色問題や最小支配集合問題、そして他の全ての NP 完全水準の問題に多項式時間アルゴリズムを適用できることがわかっています。

さて、前章のおわりに、NP 完全の「NP」は「Non-deterministic Polynomial（非決定的多項式）」の略であり、また、「完全」は、NP 完全問題のうちのひとつの多項式時間アルゴリズムが見つかれば、他のすべての多項式時間アルゴリズムに適用できることを説明しました。

多項式時間で解決可能な問題は P と呼ばれています。

つまり、肝心な疑問は、NP 完全問題のための多項式時間アルゴリズムは存在するのか、すなわち言い換えれば、P=NP であるのか?ということになります。

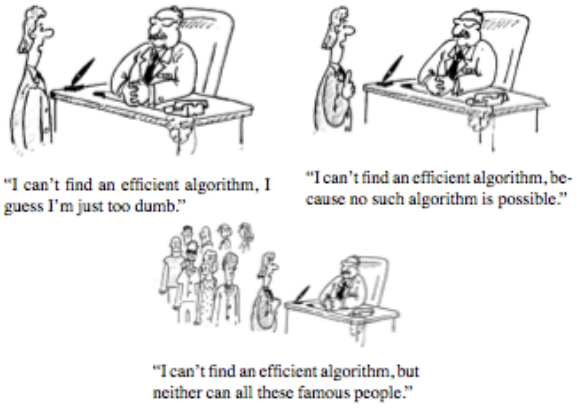

図 15.9 (YET)

この問いの答えはわかっていません。そしてこれは現代コンピュータ科学の大きな謎のひとつとなっています。

多項式時間アルゴリズムが存在する問題は、たとえそのアルゴリズムがとても遅いものだとしても「扱いやすい」と呼ばれています。

多項式時間アルゴリズムが存在しない問題は、どんなにコンピュータの計算速度が速くなったり、何台ものコンピュータを使ったりしても、実際に解ける問題のサイズはほとんど大きくならないため、「扱いにくい」と呼ばれます。

13、14、15 章で扱っている NP 完全問題が「扱いやすい」かどうかはわかりません。

しかし、コンピュータ科学者のほとんどは、NP 完全問題に対する多項式時間アルゴリズムの発見には悲観的です。更に問題点は、NP 完全は本質的に扱いにくいということの強い証拠として見なされているということを証明しています。

あなたの上司が、航空会社がシュタイナー点を導入することによりネットワークのコストを下げることができることを実際に思いついた様に、問題への最適解をもとめる効率的なアルゴリズムを考案するように求めて来たのに、それを見つけられなかったらどうしますか？

図 15.9 はあなたの取ることができる 3 つの対応方法を表しています。

もしあなたが最適解をもとめる効率的なアルゴリズムは存在しないことを証明できれば、それはすばらしいことです。

しかし、より優秀なプログラマーが将来現れ、問題を解決するまだ誰も知らない方法を思いつくかもしれないというコンピュータ科学の世界で、このような否定的な結果を証明することはとても難しいことです。

従って、不幸なことにあなたは、その問題は「扱いにくい」ものであり、効率的なアルゴリズムが無いと断言しなければならない状況にいることになります。

しかし、もしあなたがその問題は NP 完全であるということを示すことができれば、あなたが関わっている問題と同様な問題について、多くの研究者が研究をしており、そして効率的な解を見つけることが出来なかったと言うことができます。

このことにより、あなたはボーナスをもらうことはできませんが、窮地を脱することができるのです。

参考文献

RL グラハムの最短ネットワーク問題という題名の大学特別講義シリーズのビデオでは、最小シュタイナー木を紹介し、それらについて知られているいくつか結果について説明しています。

本章の多くの部分はこのビデオから触発されたものです。図 15.9 は Garey と Johnson の”Computers and

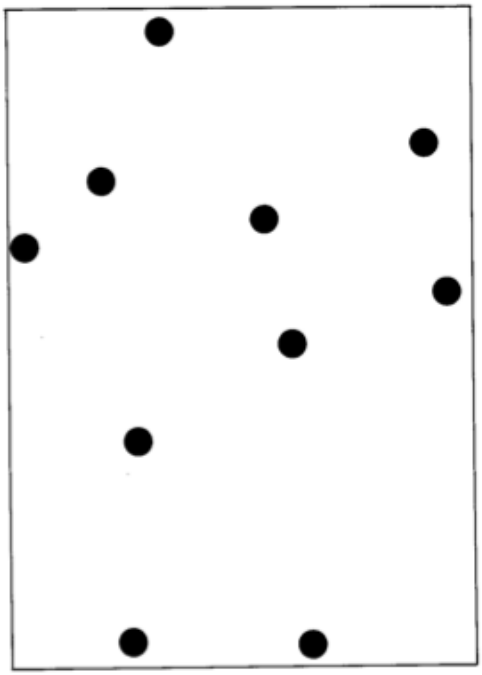

図 15.10　(YET)

Intractability”という本からの引用です。

1984 年 6 月に Scientific American に掲載された“Computer recreations”には、シャボン玉を使ったシュタイナー木の作り方の簡単な説明の紹介や、ソートのためのスパゲッティ・コンピューター、グラフ内での最短経路を見つけるためのあやとり、数字が素数かどうかを伝えるための光と鏡の装置など、問題解決のためのアナログ的な仕掛けについての面白い説明が紹介されています。

これらについては、Dewdney の Turing Omnibus（日本語版　チューリングオムニバス）という本のアナログコンピュータについての章にも出てきています。

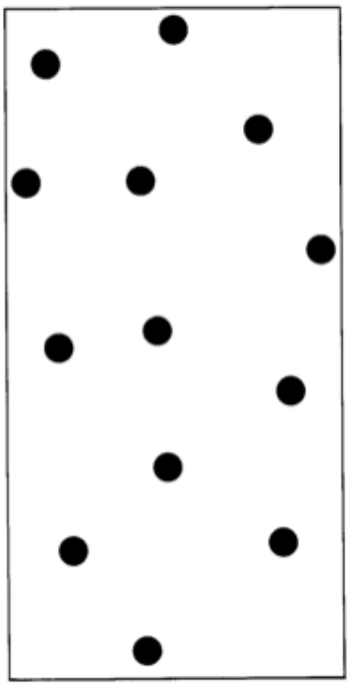

図 15.11　(YET)